Matrices spéciales orthogonales d'ordre 2

20.1 **Pté** $M \in O_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \det M = 1$ ou $\det M = -1$

Par déf $M \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^* = M^{-1}$ donc $1 = \det(I_n) = \det(M \times M^{-1}) = \det(M) \times \det(M^{-1})$

or ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $M^* = {}^tM$ dc $\det(M^*) = \det({}^tM) = \det(M)$ et $1 = \det(M) \times \det(M^*) = \det(M)^2$

d'où $\det(M) = 1$ ou -1.

20.2 **Déf** $SO_2(\mathbb{R}) = \{ M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1 \}$

20.3 **Pté** $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe. On l'appelle groupe spécial orthogonal

- $I_2^{-1} = I_2$ et $I_2^* = I_2^t = I_2$ donc $I_2^{-1} = I_2^*$, de plus $\det(I_2) = 1$ donc $I_2 \in SO_2(\mathbb{R})$
- Soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$. $A \in O_2(\mathbb{R}) \subset GL_2(\mathbb{R})$ donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = A^*$.

  $(A^{-1})^* = (A^*)^* = A = (A^{-1})^{-1}$ et $\det(A^{-1}) = \det(A^*) = \det(A) = 1$ donc $A^{-1} \in SO_2(\mathbb{R})$
- Soit $(A,B) \in (SO_2(\mathbb{R}))^2$ $(A \times B)^* = B^* A^* = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ et $\det(AB) = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$ dc $AB \in SO_2(\mathbb{R})$

$\rightarrow SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle

20.4 **Pté** Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$

$A \in SO_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ (a)

$A \in SO_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (b)

$\Longleftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1$ et $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ (c)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$A \in SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \det A = 1 \\ A^* = A^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc = 1 \neq 0 \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc = 1 \\ a = d \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow$ (a) en posant $x = a$ $y = c$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ a = d \\ b = -c \end{cases}$ (c) CQFD $\Leftrightarrow \begin{cases} |a + ic| = 1 \\ a = d \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \theta \in \mathbb{R}\ a + ic = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ a = d \\ b = -c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \theta \in \mathbb{R} \quad a = \cos(\theta) = d \\ c = \sin(\theta) = -b \end{cases} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (b) - CQFD

20.5 **Pté** Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ $A \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

Si $A \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\tilde{A} \in SO_2(\mathbb{R})$ tels que $A = \alpha \tilde{A}$. D'après 20.4 il existe $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{pmatrix}$

alors en posant $x = \alpha\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $y = \alpha\tilde{y} \in \mathbb{R}$ on a bien $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

Réciproquement si $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Soit $A = 0$ alors $A = 0 \times I_n \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$. Sinon $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ donc $\alpha = x^2 + y^2 \neq 0$

alors en posant $\tilde{x} = \frac{x}{\alpha}$, $\tilde{y} = \frac{y}{\alpha}$ on a $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \frac{x^2+y^2}{\alpha} = 1$ donc $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ d'après 20.4

donc $A = \alpha\tilde{A} \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$. CQFD.

20.5 **Pté** $(\mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$ est une algèbre

On admet que $\mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$ est une algèbre et que les distributivités entre les lois sont bien vérifiées.

- $0 = 0 \times I_n \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$
- Soit $(A, B) \in (\mathbb{R}SO_2 \mathbb{R})^2$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après 20.5 on peut écrire $A = \begin{pmatrix} x_A & -y_A \\ y_A & x_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B & -y_B \\ y_B & x_B \end{pmatrix}$

$\lambda A - B = \begin{pmatrix} \lambda x_A - x_B & -\lambda y_A + y_B \\ \lambda y_A - y_B & \lambda x_A - x_B \end{pmatrix}$ or $(\lambda x_A - x_B, \lambda y_A - y_B) \in \mathbb{R}^2$ donc d'après la réc de 20.5 $\lambda A - B \in \mathbb{R}SO_2$

$\rightarrow$ Donc $(\mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-EV.

- $I_n = 1 \times I_n \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$
- Soit $(A, B) \in (\mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}))^2$. On écrit $A = \alpha \tilde{A}$ et $B = \beta \tilde{B}$ ou $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in (SO_2(\mathbb{R}))^2$.

$AB = \alpha \tilde{A} \times \beta \tilde{B} = \alpha\beta \tilde{A}\tilde{B}$ or $\alpha\beta \in \mathbb{R}$ et $\tilde{A}\tilde{B} \in SO_2(\mathbb{R})$ d'après 20.3 dc $AB \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ Donc $(\mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau

D'où $(\mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$ est une algèbre.